SITUAÇÕES COTIDIANAS SOB O OLHAR DA PROBABILIDADE

Liamara Cristina dos Santos[1] e Daniela Trentin Nava[1]

1. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Toledo (UTFPR-TD), Licenciatura em Matemática, Toledo, Paraná, Brasil.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso versa sobre a probabilidade em situações corriqueiras do dia a dia. Foram realizadas pesquisas de natureza bibliográfica com abordagem qualitativa objetivando apresentar a origem, a grande importância e funcionalidade da teoria de probabilidade presente em situações cotidianas, como por exemplo, no jogo da dança das cadeiras, na senha padrão utilizada para bloqueio de tela inicial de celulares e em apostas de loteria, como a Mega-Sena. Também é apresentado um breve relato histórico da origem da teoria de probabilidade e seus principais estudiosos. Para as situações escolhidas, foram realizados cálculos probabilísticos e, a partir dos resultados obtidos, se torna evidente que a teoria das probabilidades, que ganhou grande importância ao longo do tempo por possuir muitas aplicações nas mais diversas áreas científicas, pode ser verificada através de simples situações cotidianas.
Palavras-chave: Teoria das probabilidades, História da probabilidade e Aplicações de probabilidade.

ABSTRACT

This research work deals with Probability in daily situations. We performed bibliographic researches with a qualitative approach which the goal was to present the origin, the importance and functionality of the probability theory as seen in daily situations, as for example, in the musical chair dance game, in the cell phone password used to unlock the initial screen and in lottery betting, like the mega-sena. We also describe a brief history of the origin of the probability theory and its most important researchers. We performed probabilistic calculations to the chosen daily situations, from the results it is evident that the theory of probabilities, which has gained great importance over time because of so many applications in various scientific areas, can be viewed in simple everyday situations.
Keywords: Probability theory, History of probability and Probability applications.

1. INTRODUÇÃO

O estudo das probabilidades começou, de acordo com alguns autores, como um truque para se ganhar em jogos de azar e hoje nos ajuda a tomar decisões dentro e fora das ciências.

A probabilidade passou a ser de grande importância por possuir aplicações em diversas áreas científicas e estar muito presente em situações do nosso cotidiano. Dentro das Diretrizes Curriculares para a Educação Básica (DCE) ela é colocada como conteúdo de tratamento de informação crucial para o desenvolvimento da interpretação crítica sobre fatos ocorridos na sociedade no nosso dia a dia (PARANA, 2008). De fato, há muitas publicações sobre suas aplicações em diversas áreas científicas, mas não se faz necessário complicações para percebê-la e estudá-la a partir de situações do nosso cotidiano, basta pensar nas chances de algo ocorrer e estará pensando na probabilidade envolvida na situação.

Eventos probabilísticos estão presente em situações do cotidiano que podem variar de uma doença terminal, um desastre natural, ou tão simplesmente quanto comprar ovos, o que nos faz questionar a importância dada a probabilidade por pesquisadores, estudiosos e por professores no Ensino Básico. Diz-se isso pois são poucos os estudos sobre sua origem e quando estudada sempre está embasada em outra área científica, enquanto que, quando abordada em sala de aula, o ensino se trata apenas de memorização e aplicação de fórmulas, mesmo sendo possível estudá-la de forma simples e significativa a partir de eventos do dia a dia.

Deste modo, este texto apresenta dados históricos a respeito da origem e importância da teoria das probabilidades, sua presença em algumas situações cotidianas e como trabalhá-las em sala de aula nos anos finais do Ensino Básico buscando desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento probabilístico e o interesse pela área.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

2.1. A HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

A probabilidade é o ramo da matemática que se dedica à modelagem de fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o acaso representa um papel preponderante, sendo o acaso um conjunto de forças não controladas que exercem um papel crucial na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno (VIALI, 2008).

Por exemplo, ao lançar uma moeda, os possíveis resultados são “cara” e “coroa”. Porém, antes de realizar os lançamentos não é possível antecipar qual dos dois resultados irá ocorrer. Isto acontece porque os fatores que determinam esses resultados não podem ser identificados e controlados (VIALI, 2008). O acaso relaciona-se também com outros exemplos, como a determinação da vida útil de um equipamento eletrônico e as previsões do tempo. Ou seja, é possível observar como o acaso pode estar associado aos jogos de azar, aos fenômenos naturais e aos eventos ocorridos no cotidiano (CALABRIA; CAVALARI, 2013).

A ideia de acaso é quase tão antiga quanto as primeiras civilizações. Inicialmente o ele era percebido como obra divina, ou seja, a percepção de que o acaso é um fenômeno natural veio a ocorrer bem mais tarde. As principais teorias sobre o surgimento de cálculos probabilísticos remetem ao tempo das primeiras civilizações no início da era pré-Cristã, como os Babilônios, os Egípcios, os Gregos e os Romanos, tendo seus primeiros indícios a partir do jogo Tali, ancestral do jogo de dado, usado para apostas, previsões sobre o futuro, na decisão de disputas e na divisão de heranças, e do cálculo de seguros, baseado na probabilidade de ocorrência de acidentes, como perda da carga de navios por naufrágio ou roubo, em certas rotas (HACKING, 2006; VIALI, 2008; CALABRIA; CAVALARI, 2013).

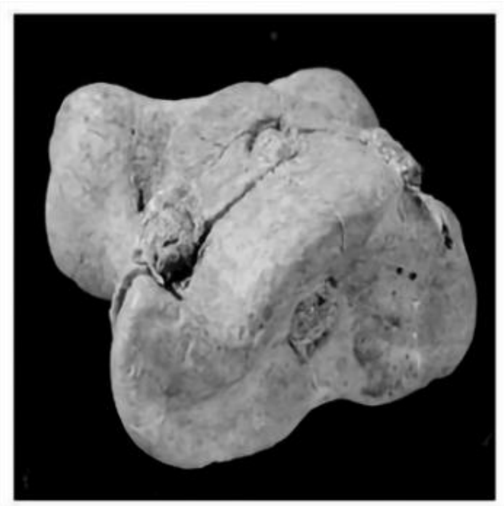


Figura 1. Osso astrálago usado no Tali.
Fonte: (CALABRIA; CAVALARI, 2013).

Com isto, alguns autores defendem que as tentativas de quantificação dos riscos associados a naufrágios, acidentes, mortes, junto com a quantificação das possibilidades de se ganhar em jogos de azar, foram os fatores pioneiros para o início da Teoria das Probabilidades (VIALI, 2008; CALABRIA; CAVALARI, 2013), porém, uma abordagem matemática do acaso e do risco só teve início efetivamente há aproximadamente 500 anos.

Até este momento, o propósito dos cálculos limitava-se a descrição e ao estudo dos jogos de azar e quase todo o esforço era concentrado no cálculo do valor de certas probabilidades de interesse, não havendo preocupação probabilísticas exata (FELLER, 1976; VIALI, 2008). A prática de jogos de azar ainda não era pensada de maneira a reduzi-las à forma matemática como, por exemplo, calcular os casos favoráveis de um jogo e estimar a regularidade do acontecimento dos eventos.

Há indícios de que os primeiros estudos probabilísticos foram realizados por mentes italianas dos séculos XV e XVI, como frei Luca Pacioli (1445 - 1517), Niccolo Fontana, mais conhecido como Tartaglia (1499 - 1557) e Girolamo Cardano (1501 - 1576). Eles foram além da comparação de frequências de ocorrências e ganhos em jogos de azar, mas não formularam conceitos e teoremas que se baseassem em alguma teoria, limitaram-se apenas a resolver problemas concretos (VIALI, 2008; SILVEIRA, 2019).

Frei Luca Pacioli dedicou-se ao estudo do problema conhecido como o problema dos pontos, ou divisão de apostas, publicando em 1494, na obra intitulada *Summa de arithmetica, geometria, proportinoni e proportionalità* (VIALI, 2008; KATZ, 2009; CALABRIA; CAVALARI, 2013).

Girolamo Cardano publicou em 1663 a obra *Liber de Ludo Alae* (Livro de Jogos de Azar), um manual de jogos "[...] que buscava permitir a tomada de boas decisões nos problemas de jogos de azar encontrados naquela época"' (COUTINHO, 2007). Sendo viciado em jogos, ele foi o primeiro a estudar o lançamento de dados. Viali, (2008) considera Cardano como o pioneiro do cálculo de probabilidade, pois foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento e também a considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Ele também conhecia a ideia de eventos independentes e a regra da multiplicação entre eles. Porém, seus estudos ficaram limitados a casos concretos de jogos de azar, principalmente o de dados.

Depois de Tartaglia e Cardano, não existe registro de outros estudiosos do século XVI, apesar de haver algumas evidências de cálculos probabilísticos realizados por Galileu Galilei (1564 - 1642) relacionados com jogos de dados (DAVID, 1962). Galileu Galilei também publicou um manual sobre jogos, o *Sopra le scoperta dei dadi*, se dedicando ao estudo de um problema semelhante ao de Cardano. Além disso, há evidências de sua relação com a distribuição normal, pois foi um dos primeiros a perceber que os erros de observações astronômicas apresentavam um comportamento típico (VIALI, 2008; TODHUNTER, 1965).

Segundo uma visão francesa, a probabilidade se desenvolveu a partir da troca de correspondências entre Blaise Pascal (1623 - 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665), onde apresentaram uma solução para um problema que questionava o número mínimo de lançamentos de um par de dados equilibrados para que se tenha um par de seis com probabilidade superior a 50% e outro semelhante ao problema dos pontos citado anteriormente, para qual apresentaram uma relação que generaliza o problema dos pontos. Nele, suponha que um jogo é interrompido quando o primeiro jogador precisa de r jogos para vencer enquanto que o segundo necessita de s jogos, onde $r + s \geq 1$. Então o primeiro jogador deve receber:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} / 2^n,$$

tal que, $n = r + s - 1$ é o número máximo de jogadas restantes (CALABRIA; CAVALARI, 2013; VIALI, 2008).

Diante disso, a correspondência entre Pascal e Fermat iniciou a teoria das probabilidades, pois estudar esses problemas desencadeou um interesse crescente pelo assunto e estudiosos da época começaram a publicar obras a respeito da probabilidade. Como, por exemplo, o holandês Christiaan Huygens (1629 - 1695), considerado o primeiro cientista a apresentar de forma sistemática os problemas já discutidos por Pascal e Fermat, adotando regras e concedendo a primeira ideia de expectativa matemática em 1657 na obra intitulada *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (DAVID, 1962). Também o francês Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) que publicou em 1812 a obra *Théorie Analytique des Probabilités* que discutia os princípios da teoria e principalmente aplicações nos jogos de azar, filosofia natural, ciência morais, testemunho, decisões judiciais e mortalidade. Além da regra de Bayes e o conceito de esperança matemática, o livro apresentava, ainda, métodos de determinar probabilidades de eventos compostos quando as probabilidades dos eventos simples são conhecidas, uma discussão do método dos mínimos quadrados, o problema da agulha de Buffon e a probabilidade inversa (VIALI, 2008).

A partir da obra de Laplace, os estudos na área cresceram ainda mais e tiveram a atenção de grandes matemáticos, como o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), o suíço Leonhard Euler (1707 - 1783), o russo Andrei Andreyevich Markov (1856 - 1922), e os franceses Siméon Denis Poisson (1781 - 1840), Jules Henri Poincaré (1854 -

1912), Félix Édouard Justin Émile Borel (1871 - 1956), Henri Léon Lebesgue (1875 - 1941), Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783) (VIALI, 2008; CALABRIA; CAVALARI, 2013).

Assim, a história da teoria da probabilidade mostra uma interação estimulante entre a teoria e a prática. Em seu desenvolvimento, o progresso da teoria abre novos campos de aplicação aumentando seu campo de influência e conduzindo a novos problemas e a pesquisas produtivas.

Para Matthews (2017) as leis da probabilidade são capazes de muita coisa além de apenas entender eventos probabilísticos, ele defende que elas têm se mostrado cruciais para separar impurezas aleatórias do ouro das evidências e, portanto, a necessidade de compreender probabilidade, risco e incerteza nunca foi tão necessária. Isso, pois em meio a agitações políticas, confusões nos mercados financeiros, riscos, ameaças e calamidades, todos ficam ansiosos por uma certeza, tornando indispensável um trabalho com a probabilidade no ensino básico que prepare alunos e os torne aptos a entender o mundo que os cerca.

2.2. O ENSINO DE PROBABILIDADE NOS ANOS FINAIS DO ENSINO BÁSICO

Teoricamente, as propostas curriculares de matemática em todo mundo, dedicam atenção especial a esses temas, enfatizando que o estudo dos mesmos é imprescindível para que as pessoas possam analisar índices de custo de vida, realizar sondagens, escolher amostras e tomar decisões em várias situações do cotidiano. De fato, é inegável que ao considerarmos o mundo em rápida mudança como o que estamos vivendo, é imprescindível o conhecimento da probabilidade de ocorrência de acontecimentos para agilizarmos a tomada de decisão e fazermos previsões (LOPES, 2008).

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica, Paraná (2008) colocam a probabilidade como um conteúdo de tratamento de informação, isto é, seu estudo deve contribuir para o desenvolvimento da leitura crítica dos fatos ocorridos na sociedade. Porém, para que o ensino da probabilidade contribua para a efetivação desse fato, é importante que se possibilite aos alunos o confronto com problemas variados do mundo real e que tenham possibilidades de escolherem suas próprias estratégias para solucioná-los, desenvolvendo o pensamento probabilístico.

A resolução de problemas é o princípio norteador da aprendizagem da matemática, mas é preciso entender que problema não é um exercício de aplicação de conceitos recém-trabalhados, mas o desenvolvimento de uma situação que envolve interpretação e estabelecimento de uma estratégia para a resolução. Não faz sentido trabalhar atividades envolvendo conceitos probabilísticos que não estejam vinculados a uma problemática (LOPES, 2008). Propor coleta de dados desvinculada de uma situação-problema não levará à possibilidade de uma análise real, apenas faz com que os alunos memorizem fórmulas e dificulta a identificação de situações em que seriam aplicadas, pois a memorização não trabalha a interpretação necessária.

Bernades (1987) defende que o ensino de matemática deve ocupar uma forma de pensar que transcenda a memorização e escrita de fórmulas ou numerais, deve se tornar uma tomada consciente de decisões. O trabalho crítico e reflexivo da probabilidade leva o estudante a repensar seu modo de ver a vida, o que contribuirá para a formação de um cidadão mais liberto das armadilhas do consumo, como por exemplo fazer apostas e arriscar seus bens.

A seguir, são apresentadas atividades que trabalham conceitos probabilísticos a partir de situações cotidianas. Nelas, o professor deve apresentar o tema, quantificar o conhecimento dos alunos a respeito do mesmo e permitir que realizem uma análise prévia do que é, e como funciona o objeto em estudo. Depois de entender a mecânica do tema estudado, deve-se estabelecer uma regra matemática que se aplica ao objeto e aplicá-la em situações "reais" sobre o tema.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 A PROBABILIDADE NA DANÇA DAS CADEIRAS

A dança das cadeiras é uma brincadeira simples que estimula agilidade, atenção, estratégia, movimento e ritmo. Por este motivo é vastamente trabalhada com crianças, o que não impede a diversão de adultos. As regras básicas são:

- ✓ O número de cadeiras deve ser menor que o número de jogadores;
- ✓ As cadeiras devem estar organizadas em círculo;
- ✓ Enquanto toca uma música, os participantes devem dançar andando em volta das cadeiras;
- ✓ Quando a música parar, todos se sentam. Quem sobrar em pé está eliminado;
- ✓ O último jogador restante será o vencedor.

De acordo com as regras, se no início da brincadeira há n jogadores participando, o número de cadeiras deverá ser $n-1$. Ao final da primeira rodada, quando o primeiro jogador for eliminado, ficarão $n-1$ jogadores e $n-2$ cadeiras, pois a cada jogada são retirados da brincadeira um jogador e uma cadeira, assim, tem-se:

→ Rodada 1: n jogadores e $n-1$ cadeiras;
→ Rodada 2: $n-1$ jogadores e $n-2$ cadeiras;
→ ...
→ Rodada *i*: $(n-i+1)$ jogadores e $(n-i)$ cadeiras.

Diante das informações analisadas, deve-se aplicar situações como a seguinte.

- **Situação:** Suponha que em uma turma hajam 13 crianças que participarão da dança das cadeiras. Qual a probabilidade de uma criança ganhar em 3 rodadas? Qual a probabilidade de uma criança ganhar em no mínimo 1 e no máximo 3 rodadas? Considerando que a criança tenha sorte de não ter saído nas três primeiras rodadas, qual a probabilidade de ela sair na quarta rodada da brincadeira?

Para descrever a probabilidade na situação, é necessário considerar os seguintes pontos:

i. Como há 13 crianças participando da brincadeira, sabe-se que o número de cadeiras é 12;
ii. A quantidade de cadeiras diminui a cada rodada, mudando a probabilidade de vencer em cada rodada;
iii. Para que a criança vença uma rodada, é necessário que tenha vencido todas as anteriores, isto é, a probabilidade de vencer a i-ésima rodada está condicionada a probabilidade de vencer as $i-1$ rodadas anteriores.

Consideradas estas informações, torna-se possível revolver as três questões apontadas através de probabilidade condicional (para mais detalhes sobre o conceito de probabilidade condicional veja (YATES; GOODMAN, 2017).

Primeiramente, segue que a probabilidade de uma criança vencer em 3 rodadas pode ser descrita como

$$P(X=3)=P(X_1 \cap X_2 \cap X_3),$$

tal que X_i: a criança ganhar na rodada i. Para resolvê-la, sabe-se que

$$P(X_1 \cap X_2 \cap X_3)=P(X_1)\cdot P(X_2|X_1)\cdot P(X_3|X_1 \cap X_2).$$

Além disso, sabe-se que $P(X_1)\ =\ 1/12$, $P(X_2|X_1)=1/11$, pois a segunda rodada possui uma cadeira a menos que a primeira, e $P(X_3|X_1 \cap X_2)=1/10$, dado que na terceira rodada já foram retiradas 2 cadeiras. Assim,

$$P(X=3)=\left(\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{1}{11}\right)\cdot\left(\frac{1}{10}\right)\approx 0{,}000758.$$

Logo, a probabilidade de a criança ganhar em 3 rodadas é de aproximadamente 0,0758%.

Agora, para calcular a probabilidade de a criança ganhar em no mínimo 1 e no máximo 3 rodadas, isto é, $P(1 \le X \le 3)$ tem-se que

$$P(1 \le X \le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3),$$

na qual $P(X=1)$ é a probabilidade de a criança ganhar a primeira rodada, $P(X=2)$ a probabilidade de ganhar na segunda rodada e $P(X=3)$ a probabilidade de ganhar na terceira rodada. Fazendo os cálculos tal qual anteriormente, tem-se $P(X=1)\approx 0{,}083333$ e $P(X=2)\approx 0{,}007576$. Logo, $P(1 \le X \le 3)\approx 0{,}091667$.

Ou seja, a probabilidade de a criança ganhar de uma a três rodadas é de aproximadamente 9,1667%. No último caso, a ideia é obter a probabilidade de a criança sair na quarta rodada da brincadeira, ou seja, $P(X=4)$, dada por

$$P(X=4)=P(X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap \overline{X_4}),$$

em que $\overline{X_4}$ é a probabilidade de sair na quarta rodada, ou seja, $\overline{X_4}=1-X_4$. Logo,

$$P(X=4)=\left(\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{1}{11}\right)\cdot\left(\frac{1}{10}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\approx 0{,}000673.$$

Portanto, a probabilidade de a criança sair exatamente na quarta rodada é de aproximadamente 0,0673%.

3.2 A SEGURANÇA DA SENHA PADRÃO

O celular se tornou um objeto comum e indispensável. Crianças, adultos e idosos acabaram por depender deste pequeno aparelho para muitas funções, como por exemplo conversas, redes sociais, fotos, informações bancárias, relógio, músicas e tantas outras funcionalidades que tornam a principal função, a de telefonar, obsoleta. Por isso, diante do fato de que carregamos cada vez mais informações pessoais e importantes no celular, existe um grande esforço em manter tais dados protegidos.

Uma das formas de proteger esses dados é por meio do bloqueio do celular através do uso de senhas de acesso. Além do leitor de digital, dentre as possíveis senhas para celulares com sistema operacional *Android*, existem:

- ✓ Senha numérica, na qual são utilizados apenas números, de 0 a 9, sendo necessário ter no mínimo 4 e no máximo 16 caracteres. Por exemplo, a senha 1234;
- ✓ Senha alfanumérica, na qual podem ser utilizados números, letras maiúsculas e minúsculas e alguns símbolos como ponto, vírgula, hífen e outros. Nesta senha, também é necessário ter no mínimo 4 e no máximo 16 caracteres. Um exemplo é a senha: _Prob.123_;
- ✓ Senha padrão, na qual as senhas são padrões de ligações entre 9 pontos dispostos em um quadrado 3 × 3.

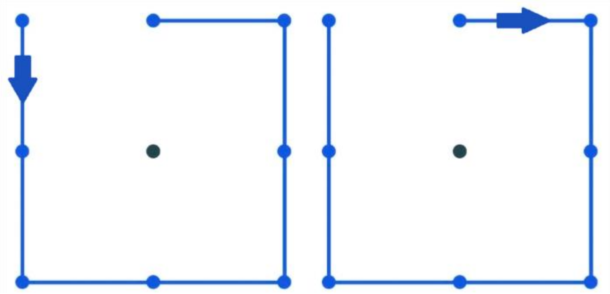
Uma representação gráfica de cada uma dessas senhas pode ser verificada na figura 2.

(a) (b) (c)

Figura 2. Representação dos três tipos de senha, (a) numérica, (b) alfanumérica, e (c) padrão, respectivamente.

Trabalharemos apenas à análise da senha padrão. Como mostra a mostra a figura 2(c), a base para os padrões se constitui de nove pontos na qual o padrão deve ser constituído pela ligação de no mínimo quatro pontos, podendo ser feito em qualquer direção e com restrições (a) um ponto não pode ser selecionado mais de uma vez; (b) não é possível passar por um ponto sem selecioná-lo.

Em uma senha padrão, a ordenação dos pontos tem influência sobre a senha. As duas representações da figura 3 abaixo, apesar de possuírem o mesmo desenho gráfico, representam senhas padrões distintas, uma vez que a ordenação dos pontos difere. A saber, ao trocar os pontos por números, a senha (a) da Figura 3 é a sequência 14789632 e a senha (b) é a sequência 23698741.



(a) (b)

Figura 3. Representações das senhas padrão (a) 14789632 e (b) 23698741.

Loge (2005) apontou em sua pesquisa que os usuários desta senha utilizam em média 5 pontos no padrão de segurança. Diante disso, o foco torna-se a investigar quantos são os padrões possíveis que utilizam 5 pontos para, assim, determinar a probabilidade de alguém sem autorização acertar o padrão de segurança de um celular.

Para quantificar tais padrões, é possível dividir o processo em três partes: padrões que comecem pelos cantos, padrões que comecem pelo meio e padrões que comecem pelo centro. Abaixo, a figura 4 exemplifica tais padrões, sendo (a) 1598732, (b) 24765 e (c) 5289731, começando pelo canto, meio e centro, respectivamente.

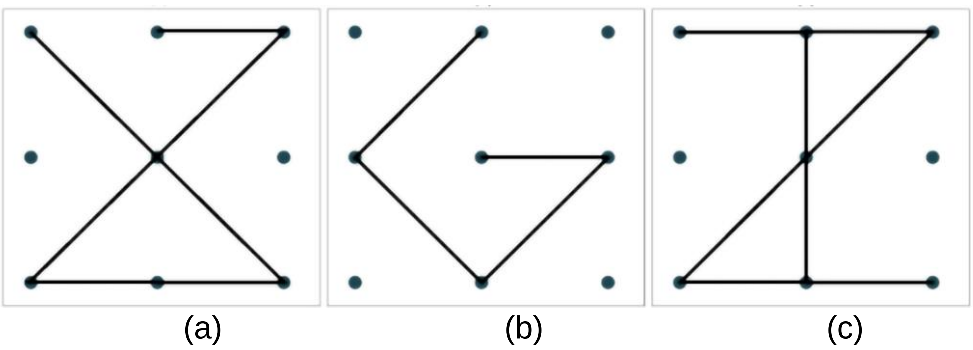


Figura 4. Representações das senhas padrão (a) 1598732, (b) 24765 e (c) 5289731, começando por um canto, meio e centro, respectivamente.

Em um padrão onde o primeiro ponto é o central, temos que os possíveis caminhos a seguir, isto é, os possíveis segundos pontos são 4 cantos e 4 meios, como mostra a figura 5.

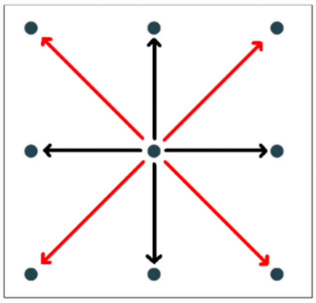


Figura 5. Representação do segundo ponto possível em um padrão iniciado no centro.

Seguindo adiante, dos 4 cantos possíveis, pode-se seguir para um dos 4 meios ou 1 canto. Por outro lado, se o segundo ponto for um dos 4 meios, as possibilidades são seguir para um dos 4 cantos ou um dos 3 meios possíveis. Com este raciocínio, é possível construir um diagrama de árvore que quantifica cada caminho até o quinto ponto do padrão iniciado no ponto central. A figura 6 é um diagrama que quantifica os padrões iniciados no centro e seguido para os cantos.

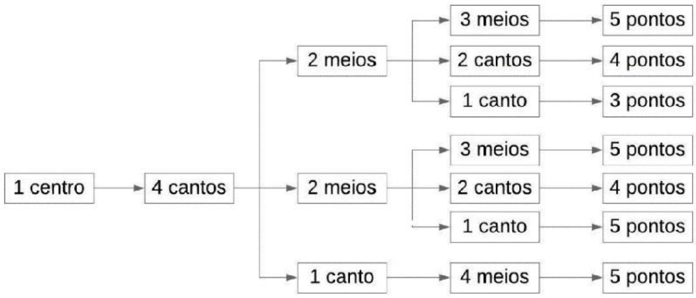


Figura 6. Representação do diagrama que quantifica os padrões iniciados no centro e seguido para os cantos.

A partir da figura 6 é possível calcular quantos padrões são possíveis sabendo que se iniciam no centro e seguem para um dos quatro cantos. Para isso, deve-se multiplicar os elementos dentro de cada linha e somar os resultados obtidos, obtendo 512 padrões possíveis.

Equivalentemente, calculam-se todas as demais possibilidades. A figura 7 representa o diagrama que quantifica os padrões iniciados no centro e seguido para os meios.

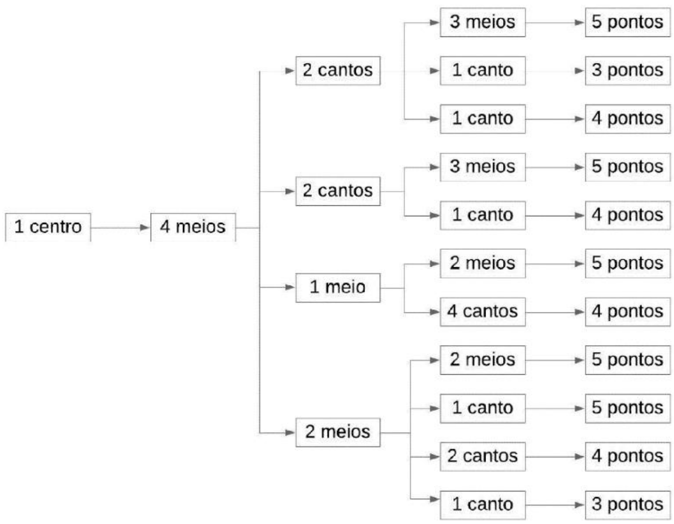
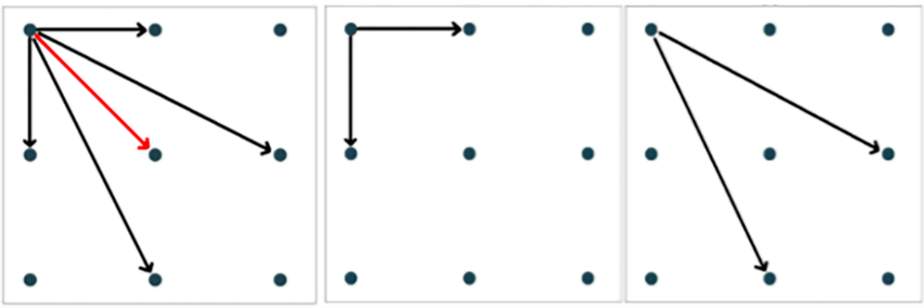


Figura 7. Representação do segundo o diagrama que quantifica os padrões iniciados no centro e seguido para os meios.

Assim, ao multiplicar os elementos das linhas e somar seus resultados obtém-se 640 padrões possíveis que se iniciam no centro e seguem para um dos quatro meios. Ou seja, é possível traçar 1.152 padrões diferentes iniciados no ponto central. Analogamente, quantificamos os caminhos possíveis para padrões que se iniciam em cantos e para padrões que se iniciam em meios.

Partindo dos cantos, os padrões têm como opção de segundo ponto o centro ou os meios, como mostra a figura 8.



(a) (b) (c)

Figura 8. Representação do segundo ponto possível em um padrão iniciado no canto. Representação de (a) meios "a" localizados diretamente ao lado do canto inicial e (b) meios "b" localizados do lado oposto.

Neste caso, além do ponto central, tem-se que meios diretamente ao lado do ponto inicial geram caminhos diferentes dos meios localizados do lado oposto. As figuras 8(a) tem-se a situação meios "a" para diretamente ao lado, e 8(b) meios "b" para o lado oposto ao canto inicial. Calcula-se 704 padrões que se iniciam no canto e têm o centro como segundo ponto. Existem 960 padrões que se iniciam no canto e seguem para os meios "a", e, há um total de 1.072 padrões que se iniciam no canto e seguem para os meios "b". Portanto, é possível traçar 2.736 padrões diferentes quando iniciados em qualquer um dos 4 cantos.

Para finalizar, partindo dos quatro meios os padrões tem como opção de segundo ponto o centro, dois meios e quatro cantos, como mostra a figura 9 abaixo.

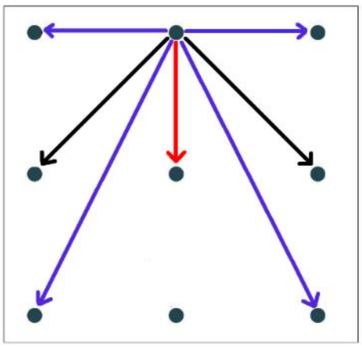
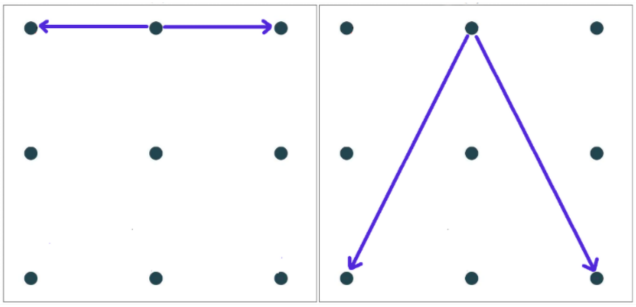


Figura 9. Representação do segundo ponto possível em um padrão iniciado no meio.

Como no caso anterior, neste tem-se que cantos diretamente ao lado do ponto inicial geram caminhos diferentes de cantos localizados ao lado oposto. A figura 9 (a) exemplifica cantos "a" para o lado e, a figura 10 (b) cantos "b" para o lado oposto ao meio inicial.



(a) (b)

Figura 10. Representação de (a) cantos "a" localizados diretamente ao lado do meio inicial e (b) cantos "b" localizados do lado oposto.

Observa-se 640 padrões possíveis que têm como primeiro ponto um meio e o segundo ponto o centro. Calcula-se 992 padrões possíveis com primeiro ponto um meio e o segundo ponto outro meio. Padrões que têm como primeiro ponto um meio e o segundo ponto um canto "a" computam 864 padrões, e, finalmente, padrões que têm como primeiro ponto um meio e o segundo ponto algum canto "b" resultam em 768 padrões. Ou seja, é possível traçar 3.264 padrões diferentes iniciados em um dos 4 meios.

De todo o relatado, a soma dos possíveis padrões iniciados no centro, cantos e meios resulta em 7.152 padrões de 5 pontos que podem ser usados como a senha de segurança de um celular.

Diante dessas informações é possível analisar a seguinte situação hipotética:

- **Situação:** Suponha uma aposta em que Fulano deve acertar a senha do celular de seu amigo sem utilizar estratégias. Dado que a única informação que possui é que o padrão se inicia no canto superior esquerdo, qual a chance de acertar a senha na décima tentativa?

Como visto, é possível traçar 2.736 padrões quando iniciados em um dos 4 cantos, logo, existem 684 padrões que se iniciam no canto superior esquerdo. Considera-se que

Fulano tentará acertar a senha sem utilizar estratégias, ou seja, fará os padrões aleatoriamente. Assim, a probabilidade de acerto em cada tentativa é de $\frac{1}{684}$.

Ao tentar acertar a senha, em cada tentativa existem apenas duas possibilidades: sucesso ou fracasso. Como o objetivo nesta situação é calcular a probabilidade de acertar a senha, consideramos o sucesso $p\text{: } acertar\ a\ senha$ e o fracasso $q\text{: } errar\ a\ senha$. Dessa forma, $p = {}^{1}/_{684}$ e $q = 1 - {}^{1}/_{684}$ em cada tentativa.

Para descrever a probabilidade de Fulano acertar a senha na décima tentativa, precisamos incluir no cálculo a probabilidade de ocorrência de 9 fracassos anteriores. Para isso, utiliza-se a distribuição Geométrica de probabilidades

$$P(X = x) = p \cdot q^{x-1},$$

em que $x = 10$ (Para maiores informações, consulte Neto & Cymbalista (2006)). Assim,

$$P(X = 10) = \left(\frac{1}{684}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{684}\right)^{9} \approx 0{,}001443.$$

Portanto, Fulano tem aproximadamente 0,14% de chance de errar a senha 9 vezes e acertar na tentativa seguinte, isso sem usar estratégia alguma para acertar a senha.

3.3 ACERTANDO NA MEGA-SENA

A Caixa Econômica Federal é a responsável pela administração e gestão das loterias no Brasil, existindo dez tipos de jogos: Mega-Sena, Lotofácil, Quina, Lotomania, Timemania, Duplasena, Federal, Loteca, Lotogol e Dia De Sorte (CAIXA, 2020).

A Mega-Sena é o jogo que paga o maior prêmio dentre os jogos de loteria da Caixa e também é o que possui a menor probabilidade de acerto (CAIXA, 2020). Isso, pois para ganhar o prêmio máximo é necessário acertar os 6 números sorteados no conjunto de 1 a 60, sendo a aposta mínima de 6 números e a máxima de 15. Também são pagos prêmios a quem acerta 4 ou 5 números dos 6 sorteados, denominados quadra e quina, respectivamente.

Para calcular a probabilidade de alguém acertar na mega-sena utiliza-se a probabilidade de ocorrência de um evento, isto é, a razão entre os resultados favoráveis e todos os resultados possíveis Ross (2010), porém, neste caso, resultados favoráveis será a quantidade de combinações possíveis entre os números jogados, enquanto que resultados possíveis será a quantidade total de combinações de números que podem ser sorteados.

Ao jogar 6 números para acertar a sena só há uma combinação possível no jogo, porém existem 6 combinações diferentes entre os números ao tentar acertar a quina e o sexto número (o não acertado) poderá ser qualquer um dos 54 restantes. Ao tentar acertar a quadra, tem-se 15 combinações possíveis entre os 6 jogados, e os dois não acertados poderá ser qualquer combinação dos 54 não jogados tomados 2 a 2.

Dessa forma, é preciso calcular as combinações possíveis para acertos entre a quantidade de números jogados k, tal que $6 \leq k \leq 15$, e a quantidade x de números que se pretende acertar, isto é, $x = 4$, $x = 5$ ou $x = 6$. Ao mesmo tempo, é necessário fazer a combinação simples entre $N - k$ e $n - x$, ou seja, entre a quantidade de números não jogados e a quantidade que não é preciso acertar (FRAGA, 2013).

Como dito, também é necessária a quantidade de combinações possíveis a serem sorteadas, ou seja, todas as combinações que existem ao sortear 6 números dos 60 disponíveis.

Possuindo essas informações, calcula-se $P(X = x)$ a probabilidade de acertar x números na mega-sena com a seguinte fórmula (onde X é uma variável aleatória hipergeométrica, para mais detalhes sobre tal distribuição consulte Montgomery e Runger, (2018):

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \cdot \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}. \qquad (1)$$

3.3.1. Probabilidade de acertar 6 números

Nessa situação, $x = 6$ é a quantidade de números que se deseja acertar e $6 \leq k \leq 15$ é a quantidade de números que podem ser apostados no jogo. Dessa forma, como $N = 60$ e $n = 6$ são fixos, a Equação (1) se torna

$$P(X = 6) = \frac{\binom{k}{6} \cdot \binom{60-k}{6-6}}{\binom{60}{6}},$$

em que $6 \leq k \leq 15$. Para a aposta mínima de 6 números, $k = 6$,

$$P(X=6)=\frac{\binom{6}{6}\cdot\binom{54}{0}}{\binom{60}{6}}=\frac{1\cdot 1}{50.063.860}\approx 0{,}00000002.$$

Portanto, a chance de acertar na Mega-Sena fazendo a aposta mínima é de aproximadamente 0,000002%. Dessa mesma forma calcula-se as chances de o jogador ganhar apostando de 7 a 15 números, como descrito na tabela 1 abaixo.

Tabela 1. Probabilidades de acertar 6 números na mega-sena.

Aposta de	Probabilidade (%)
6 números	0,000002
7 números	0,000014
8 números	0,000056
9 números	0,00017
10 números	0,00042
11 números	0,00092
12 números	0,0018
13 números	0,0034
14 números	0,006
15 números	0,01

Da mesma forma, pode-se calcular as probabilidades de acertar a quina e a quadra, pois, como dito anteriormente, jogadores que acertam 4 ou 5 números dos 6 sorteados também ganham uma premiação.

3.3.2. Probabilidade de acertar 5 números

Ao calcular as chances de acertar 5 dos 6 números sorteados (quina), também utiliza-se a Equação (1), porém agora com $x = 5$:

$$P(X=5)=\frac{\binom{k}{5}\cdot\binom{60-k}{6-5}}{\binom{60}{6}}.$$

Assim, a probabilidade de acertar na quina fazendo a aposta mínima é de aproximadamente 0,00065%, pois

$$P(X=5)=\frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{54}{1}}{\binom{60}{6}}=\frac{6\cdot 54}{50.063.860}=\frac{324}{50.063.860}\approx 0{,}0000065.$$

Analogamente, pode-se calcular as probabilidades para apostas de 7 a 15 números, apenas variando o valor de k na Equação (1). As probabilidades resultantes são apresentadas na tabela 2 a seguir.

Tabela 2. Probabilidades de acertar 5 números na mega-sena.

Aposta de	Probabilidade (%)
6 números	0,00065
7 números	0,0022
8 números	0,0058
9 números	0,013
10 números	0,025
11 números	0,045
12 números	0,076
13 números	0,12
14 números	0,18
15 números	0,27

3.3.3. Probabilidade de acertar 4 números

Os cálculos ocorrem analogamente para obter as chances de acertar 4 dos 6 números sorteados, entretanto, nesta situação adota-se $x = 4$.

$$P(X = 4) = \frac{\binom{k}{4} \cdot \binom{60-k}{6-4}}{\binom{60}{6}}.$$

A tabela 3, a seguir, dispõe das probabilidades chances de o jogador acertar 4 números apostando de 7 a 15 números.

Tabela 3. Probabilidades de acertar 4 números na mega-sena.

Aposta de	Probabilidade (%)
6 números	0,043
7 números	0,096
8 números	0,19
9 números	0,32
10 números	0,51
11 números	0,78
12 números	1,12
13 números	1,54
14 números	2,07
15 números	2,70

3.3.4 Comparando as probabilidades da loteria

Até agora as probabilidades de cada aposta e acertos na quadra, quina e sena foram apresentadas separadamente. A tabela 4 mostra os resultados anteriores em proporção e possibilita comparar a probabilidade de cada aposta.

Tabela 4. Probabilidades de acertar na quadra, quina e sena

Quantidade de números apostados	Sena (1 em)	Quina (1 em)	Quadra (1 em)
6	50.063.860	154.518	2.332
7	7.151.980	44.981	1.038
8	1.787.995	17.192	539
9	595.998	7.791	312
10	238.399	3.973	195
11	108.363	2.211	129
12	54.182	1.317	90
13	29.175	828	65
14	16.671	544	48
15	10.003	370	37

Fica evidente que quanto mais números apostados, mais aumentam as probabilidades de acerto, tanto na sena quanto na quina ou na quadra. Em contrapartida, enquanto o valor de uma aposta simples de 6 números atualmente custa R$4,50, a aposta máxima de 15 números custa R$22.522,50 (CAIXA, 2020). Ou seja, apesar da probabilidade aumentar de 0,000002% para 0,01% na sena, de 0,0022% para 0,27% na quina e de 0,043% para 2,7% na quadra, há uma diferença monetária de R$22.518,00 e as chances ainda são menores que 3% em todos os casos.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como visto, o início dos estudos sobre a teoria das probabilidades nos remete a era pré-Cristã, se iniciando a partir de estratégias de jogadores para vencer apostas em jogos de azar, também havendo rumores sobre o desenvolvimento de cálculos a partir da cobrança de seguros. A cada estudo e obra publicada, mais estudiosos se interessavam e investigavam a fundo outras situações, como Girolamo Cardano, Frei Luca Pacioli, Tartaglia e até Galileu Galilei. Dessa forma, a teoria das probabilidades foi se desenvolvendo e conquistando sua importância em diferentes áreas do conhecimento.

Hoje a teoria das probabilidades possui aplicações nas mais diversas áreas científicas e objetivou este trabalho a apresentar que, apesar de sua grandeza, a probabilidade pode ser estudada através de simples situações cotidianas. Nele foram apresentadas três situações escolhidas arbitrariamente que podem ser trabalhadas em sala de aula: o jogo da dança das cadeiras, que utilizou apenas a probabilidade condicional entre eventos; a senha padrão utilizada para bloqueio de tela inicial de celulares, com foco no padrão de 5 pontos, na qual apresentou-se o uso do diagrama de árvore; e as apostas na Mega-Sena, uma das loterias administradas pela Caixa Econômica Federal, na qual estudou-se o conceito de combinação simples.

A descrição da probabilidade presente em cada situação analisada mostrou que essa teoria pode ser estudada de forma simplificada, fora de ramos científicos e descartando o processo de memorização e aplicação aleatória de fórmulas. O uso de resolução de problemas, torna a aula mais produtiva uma vez que os alunos devem apresentar possíveis caminhos para as resoluções. Além disso, se torna interessante situações ainda mais simples e cotidianas, como preparar uma refeição ou tomar caminhos para um compromisso.

Apresentam a probabilidade, considerada difícil, através de situações simples que podem facilitar o primeiro contato com esta ciência. Trabalhar com situações que estejam presentes no dia a dia do aluno ou que sejam de fácil acesso para que o aluno a análise e a entenda pode gerar um grande enriquecimento ao ensino de probabilidade melhorando sua qualidade e, consequentemente, desenvolvendo no aluno o pensamento probabilístico e crítico sobre fatos ocorridos a sua volta.

5. REFERÊNCIAS

BATISTA, A. A. V. **Incertezas, decisões e o estudo da probabilidade.** Disponível em <https://educacao.estadao.com.br/blogs/blog-dos-colegios-santa-maria/incertezas-decisoes-e-o-estudo-da-probabilidade/>. Acessado em 01/06/2019.

BERNARDES, O. Para uma abordagem do conceito de probabilidade. **Educação & Matemática,** n. 3, p. 13-15, 1987.

CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. **Loterias Caixa.** Disponível em <http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena/>. Acessado em 15/07/2019.

CALABRIA, A. R.; CAVALARI, M. F. Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. **XX SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**, Campinas: Unicamp, 2013.

COUTINHO, C. Q. S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revista Eletrônica de Educação Matemática,** v. 2, n. 3, p. 50-67, 2007.

DAVID, F. N. **Games, gods and gambling: a history of probility ans statistical ideas.** 1ª ed, Hafner Publishing Company, 1962.

FELLER, W. **Introdução à teoria das probabilidades e suas aplicações: parte 1 - espaços amostrais discretos.** Edgard Blücher, 1976.

FRAGA, R. R. **O estudo das loterias: uma abordagem motivadora e facilitadora para aprendizagem de probabilidade no ensino médio.** (Dissertação) Mestrado Profissional em Matemática - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

HACKING, I. **The emergence of probability: a philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference.** 2ª ed. Cambridge University Press, 2006.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics: an introduction.** 3ª ed, Addison Wesley, 2009.

LOGE, M. D. **Me Who You Are and I Will Tell You Your Unlock Pattern.** (Dissertação) Mestrado em Ciência da Computação - Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2015.

LOPES, C. E. O Ensino da estatística e da Probabilidade na Educação Básica e a Formação dos Professores. **Revista Cadernos Cedes**, v. 28, n. 74, p. 57-73, 2008.

MATTHEWS, R. **As leis do acaso: como a probabilidade pode nos ajudar a compreender a incerteza.** 1ª ed, Jorge Zahar, 2017.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros.** 6ª ed, LTC, 2018.

NETO, P. L. O. C.; CYMBALISTA, M. **Probabilidades: resumos teóricos, exercícios resolvidos, exercícios propostos.** 2ª ed, Editora Blucher, 2006.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática.** Curitiba, 2008.

ROSS, S. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações.** 8ª ed, Bookman, 2010.

SILVEIRA, J. F. P. **Início da Matematização das probabilidades.** Disponível em <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2c.html>. Acessado em 24/06/2019.

TODHUNTER, I. **Mathematical Theory of Probability: from the time of Pascal to that of Laplace.** Chelsea Publishing Company Bronx, 1965.

VIALI, L. Algumas Considerações sobre a Origem da Teoria das Probabilidades. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 8, n. 16, p. 143-153, 2008.

YATES, R. D.; GOODMAN, D. J. **Probabilidade e processos estocásticos: uma introdução amigável para engenheiros eletricistas e da computação.** 3ª ed, LTC, 2017.